TD de calcul matriciel

Exercice 1.

Calculer $\lambda u + \mu v$: $\mathbb{R}^4$, $u = (1, 6, -2, -8)$,$v = (0, 1, -2, 7)$, $\lambda = 2$ *et* $\mu = -3$.
Le chargé de TD donnera une liste de cas à traiter dans cet exercice.

Exercice 2.

Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$ *(ou* $\mathbb{R}^4$ *pour la dernière famille) ?*

1. (u, v) *avec* $u = (1, 2, 3)$ *et* $v = (-1, 4, 6)$;
2. (u, v, w) *avec* $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ *et* $w = (0, 0, 1)$;
3. (u, v, w) *avec* $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ *et* $w = (-1, 2, -3)$;
4. (u, v, w, z) *avec* $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (5, 6, 7, 8)$, $w = (9, 10, 11, 12)$ *et* $z = (13, 14, 15, 16)$.

Exercice 3.

Dans $\mathbb{R}^n$, *on considère une famille de 4 vecteurs libres* (e_1, e_2, e_3, e_4). *Les familles suivantes sont-elles libres ?*

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$;
2. (e_1, e_3) ;
3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_3 + e_4)$;
4. $(2e_1 + e_2, e_1 - 2e_2, e_4, 7e_1 - 4e_2)$.

Exercice 4.

Soient $u = (1, 2, -3)$ *et* $v = (2, 1, 5)$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$.

1. *Les vecteurs* u *et* v *sont-ils colinéaires ?*

2. *Les vecteurs* u *et* v *sont-ils orthogonaux ?*

Exercice 5.

On consid'ere les vecteurs $u = (1, 1, 0)$ *et* $v = (1, 0, 1)$

1. *Calculer* $\|u\|$ *et* $\|v\|$.

2. *Calculer le produit scalaire de* u *par* v

3. *En d ´eduire une valeur de l'angle géométrique entre* u *et* v

Exercice 6.

Soient u *et* v *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$. *Calculer le produit vectoriel de* u *et* v

1. $u = (1, -1, 1)$ *et* $v = (-2, 3, 1)$.

2. $u = (-1, 1, 2)$ *et* $v = (1, 0, -1)$.

3. $u = (cos(\alpha), sin(\alpha), 1)$ *et* $v = (cos(\beta), sin(\beta), 1)$ *où* α *et* β *désignent deux réels.*

Exercice 7.

Soient $u = (3, 1, -2)$, $v = (1, 3, -1)$ *et* $w = (3, 0, 2)$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^3$. *Déterminer les coordonnées des vecteurs :*

1. $u \wedge v$

2. $v \wedge u$

3. $(u \wedge v) \wedge w$

4. $u \wedge (v \wedge w)$

Exercice 8.

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? Déterminer ces produits.

Exercice 9.

Calculer lorsque cela est possible, les produits AB *et* BA *dans chacun des cas suivants :*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10.

Soit $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer puis comparer :

1. $(A+B)^2$ *et* $A^2 + 2AB + B^2$.

2. $(A+B)^2$ *et* $A^2 + AB + BA + B^2$.

Exercice 11.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Trouver toutes les matrices* $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *qui commutent avec* A*, c'est-à-dire telles que* $AB = BA$.

Exercice 12.

Soient a *et* b *des réels non nuls, et* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. *Trouver toutes les matrices* $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *qui commutent avec* A.

Exercice 13.

Déterminer deux éléments A *et* B *de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *tels que :* $AB = 0$ *et* $BA \neq 0$.

Exercice 14.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est une matrice stochastique si la somme des coefficients sur chaque colonne de* A *est égale à 1. Démontrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique si* $n = 2$.

Exercice 15.

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, A^3. *En déduire la valeur de* A^n *pour tout* $n \geq 1$. *Répondre aux mêmes questions pour* B.

Exercice 16.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{et } B = A - I.$$

Calculer B^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *En déduire* A^n.

Exercice 17.

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -7 \end{vmatrix} \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Exercice 18.

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad et\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$$

où a, b, c, d sont des éléments de $\mathbb{R}$.

Exercice 19.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB, AC. Que constate-t-on ? La matrice A peut-elle être inversible ? Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle).

Exercice 20.

1. *Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.*
2. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.*
3. *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.*

Exercice 21.

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? (Vous utiliserez le calcul du rang) Si oui, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22.

Pour quelles valeurs du paramètre t la matrice suivante est-elle inversible ? Dans ce cas, déterminer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 23.

Pour quelles valeurs du paramètre m la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet-elle un inverse ? On ne demande pas de calculer l'inverse.

Exercice 24.

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25.

Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles M_α est inversible.

Exercice 27.

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 3 \\ x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+2z & = & 1 \\ -y+z & = & 2 \\ x-2y & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 28.

1. *Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que M est inversible et calculer M^{-1}.*
2. *En déduire les solutions du système*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-z & = & m \\ -2x+3y+4z & = & 1 \\ y+z & = & 2m \end{array}\right.$$

Exercice 29.

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3t & = & 1 \\ 2x+y-z+t & = & -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & 4 \\ x+3y-z & = & 11 \\ 2x+5y-5z & = & 13 \\ x+4y+z & = & 18 \end{array}\right.$$

Exercice 30.

Déterminer, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ et en utilisant l'algorithme de Gauss, l'ensemble des solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 1 \\ 3x+y-z & = & 1 \\ x-2y+2z & = & m \end{array}\right.$$